الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي

ثانويات: علي عون – السعيد عبد الحي –بن عون لخضر – بحري بكار

الشعبة: علوم تجريبية

دورة: **2022**

امتحان البكالوريا التجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: **03** سا و **30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:(4 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات حمراء مرقمة بـ 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 وَ 4 كريات بيضاء مرقمة بـ 0 ، 1 ، 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها باللمس)

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس .

1) أُحسب احتمال الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون " ، B : " الحصول على كريتين تحملان رقمين جُداؤهما معدوم" .

2) بيّن أنّ : $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ ، ثم استنتج $P_{A}(B)$ و $P(A\cup B)$.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكريتين .

– عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثاني:(5 نقاط)

I– (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{3u_n+2}$

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{2x}{3x+2}$

1) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n\leq 2$.

3) أُدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

II– (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{\alpha}{u_n}$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{3}{2}$.

– نضع $\alpha=1$

2) أُكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أُحسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) أُحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=e^{v_0}+e^{v_1}+\cdots+e^{v_n}$.

التمرين الثالث: (**4 نقاط**)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 2cm).

1) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{4}\left(f(x)-2f'(x)+f''(x)\right)=e^x$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) أ- أُدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب - أُحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=2$ (بالسنتمتر المربّع) .

التمرين الرابع: (**7 نقاط**)

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^2-e^{-x}+3x+1$

1) أُحسب $g'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغيّر الدالة g' .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g'(x)>0$ ، ثم استنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3) أُحسب $g(0)$ ، ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x^2+x)e^x-x$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أُحسب نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أُدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x g(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x)=(x^2+5x+4)e^x$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما .

5) اّرسم بعناية كلا من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6) أ- بيّن أن الدالة $x\mapsto(x^2-2x+2)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن: $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=1$.

جـ- اّحسب $\int_0^1(x^2+x)e^x\mathrm{d}x$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل: (4 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة.

1) المعادلة: $\log(x^2+11x-2)=\log(x)+1$ تقبل حلين متمايزين .

2) المعادلة: $3^{x-2}=4$ تقبل حلا وحيدا أكبر تماما من 4 .

3) القيمة المُتوسّطة للدالة f حيث: $f(x)=-x+3+\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1}$ على المجال $[1;5]$ تساوي: $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{e^8+1}{e^{10}+1}\right)$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا الجُداء $P_n=e^4\times e^7\times e^{10}\times\ldots\ldots\ldots\times e^{3n+4}$

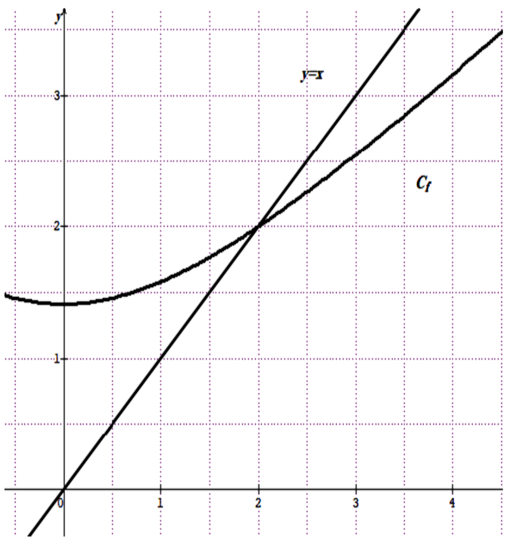
– إذا كان $\ln(P_n)=781$ فإن : $n=21$

التمرين الثاني: (5 نقاط)

I– (u_n) المُتتالية العدديّة المُعرفة بحدها الأوّل $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

حيث f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل التالي :

1) أ– أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل .



ب – خمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq 2$.

ب –بيّن أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\times\frac{(2-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{\frac{1}{2}{u_n}^2+2}+u_n}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

جـ– استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

II– (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n={u_n}^2-4$

1) بيّن أنّ (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أُكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم u_n بدلالة n ، أُحسب عندئذ نهاية المتتالية (u_n) .

3) أُحسب بدلالة n : $S_n={u_0}^2+{u_1}^2+\cdots+{u_n}^2$.

التمرين الثالث: (**4 نقاط**)

كيس به 8 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 سوداء وَ5 بيضاء .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس .

1) أُحسب احتمال الحدثين التاليين :

A : " سحب كرية بيضاء على الأقل " ، B : " سحب كريتين من نفس اللون" .

2) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب 40 DA ويتحصل على α DA على كل كرية بيضاء مسحوبة ويخسر 30 DA على كل كرية سوداء مسحوبة .(α عدد طبيعي مُعطى و DA تعني دينار جزائري)

– ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

أ – برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{2\alpha-40 \ ; \ \alpha-70 \ ; \ -100\}$ ثم عرف قانون احتماله .

ب – أُحسب الأمل الرياضياتي بدلالة α ثم استنتج أصغر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب .

التمرين الرابع: (**7 نقاط**)

I– نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0 \ ; +\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+3-2\ln x$

1) أُدرس اتجاه تغير الدالة g .

2) عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0 \ ; +\infty[$.

3) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $g(x+1)>0$

II– نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1 \ ; +\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 2cm).

1) أ– بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)=-\infty$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب– بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1 \ ; +\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x+1)}{(x+1)^2}$.

ب– استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ– بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f).

ب – أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0.3<\alpha<0.4$.

5) أُرسم بعناية المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6) أ– أُحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\lambda$ و $y=x$. (λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1)

ب – احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني

- بكالوريا تجريبية 2016 -

- الموضوع الأول -

• حل مقترح للبكالوريا التجريبية الموحدة؟

الشعبة: علوم تجريبية   16 ماي 2016

2• الموضوع الأول

• التمرين الأول: السحب كرتين في آن واحد (توفيقة)

5R	② ② ① ① ⓪
4B	② ① ① ⓪

• عدد الحالات الممكنة: $C_9^2 = 36$

1/ حساب احتمال الحدثين A و B

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_2^2}{C_9^2} = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

2/ بيان أن $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$ "$A\cap B$" كرتين مختلفتين في اللون وإحداهما معدوم "

$$P(A\cap B) = \frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_5^1 \times C_1^1}{C_9^2} = \frac{9}{36} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2 1 1 0 R / 0 B	0 R / 2 1 1 0 B

استنتاج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{9}} = \boxed{\frac{9}{20}}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{5}{9} + \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{13}{18}}$$

3/ قيم المتغير العشوائي X: $x_i = \{0;1;2;3;4\}$

$$P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{36}} \qquad P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_9^2} = \boxed{\frac{8}{36}}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_4^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{12}{36}} \qquad P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_9^2} = \boxed{\frac{12}{36}}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{3}{36}}$$

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$

$$E(X) = \sum x_i P_i = (0)\left(\frac{1}{36}\right) + (1)\left(\frac{8}{36}\right) + (2)\left(\frac{12}{36}\right) + (3)\left(\frac{12}{36}\right) + (4)\left(\frac{3}{36}\right) = \boxed{\frac{20}{9}}$$

التمرين الثاني:

1/ تبيان أن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

لدينا:
$$f'(x)=\frac{(2)(3x+2)-(3)(2x)}{(3x+2)^2}=\frac{4}{(3x+2)^2}$$

$f'(x)>0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ إذن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2/ البرهان بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $P(n): 0<U_n\leq 2$

• نبرهن صحة $P(0)$، لدينا $U_0=2$ و $0<2\leq 2$ إذن $P(0)$ محققة

• نفرض صحة $P(n)$ أي: $0<U_n\leq 2$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $0<U_{n+1}\leq 2$

لدينا $0<U_n\leq 2$ و بما أن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

إذن $f(0)<f(U_n)\leq f(2)$

منه: $0<U_{n+1}\leq\frac{1}{2}$ أي $0<U_{n+1}\leq\frac{1}{2}\leq 2$

ومنه $P(n+1)$ محققة.

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $0<U_n\leq 2$

3/ دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$: لدينا: $U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n}{3U_n+2}-U_n$

$$=\frac{2U_n-3U_n^2-2U_n}{3U_n+2}=\frac{-3U_n^2}{3U_n+2}$$

• لدينا: $0<U_n\leq 2$ منه $2<3U_n+2\leq 8$

و $0<U_n^2\leq 4$ منه $-12\leq -3U_n^2<0$

إذن $U_{n+1}-U_n<0$ ومنه (U_n) متناقصة تماما

طريقة 2: نضع $U_n=x$، ندرس إشارة $\frac{-3x^2}{3x+2}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$-3x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-3x^2}{3x+2}$		$+$	||	$-$	0	$-$	

إذا كان $0<U_n\leq 2$ فإن $U_{n+1}-U_n<0$ إذن (U_n) متناقصة تماما،

استنتاج أن (U_n) متقاربة:
بما أن (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة.

II/ $V_n = \frac{\alpha}{U_n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$

1/ نعين قيمة α حتى تكون (V_n) حسابية أساسها $r = \frac{3}{2}$

(V_n) حسابية معناه: $V_{n+1} - V_n = \frac{3}{2}$ $(V_{n+1} - V_n = r)$ $(r \in \mathbb{R})$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{\alpha}{U_{n+1}} - \frac{\alpha}{U_n} = \frac{\alpha}{\frac{2U_n}{3U_n+2}} - \frac{\alpha}{U_n}$$

$$= \frac{\alpha(3U_n+2)}{2U_n} - \frac{\alpha}{U_n} = \frac{3\alpha U_n + \cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha}}{2U_n}$$

$$= \frac{3\alpha \cancel{U_n}}{2\cancel{U_n}} = \frac{3}{2}\alpha$$

ومن جهة أخرى لدينا $V_{n+1} - V_n = \frac{3}{2}$

إذن: $\frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{2}$ ومنه $\boxed{\alpha = 1}$

2) كتابة V_n بدلالة n: $V_n = V_0 + nr$ ومنه: $\boxed{V_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}n}$

$$\left(V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{2}\right)$$

استنتاج U_n بدلالة n لدينا $V_n = \frac{1}{U_n}$ ومنه $U_n = \frac{1}{V_n}$

إذن $\boxed{U_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n}}$

3/ حساب نهاية (U_n)

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n}\right) = 0$$

لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n\right) = +\infty$

4/ حساب S_n: لدينا: $e^{V_n} = e^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n} = e^{\frac{1}{2}} \times \left(e^{\frac{3}{2}}\right)^n$

(e^{V_n}) متتالية هندسية أساسها $e^{\frac{3}{2}}$ وحدها الأول $e^{\frac{1}{2}}$

$$S_n = e^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1 - \left(e^{\frac{3}{2}}\right)^{n+1}}{1 - e^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$S_n = e^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1 - e^{\frac{3n+3}{2}}}{1 - e^{\frac{3}{2}}}\right]$$

الجزء الثاني :

1/ أ/ لدينا ؛ $\cdot f'(x) = (4x-7)(e^x) + (e^x)(2x^2-7x+5)$

$= e^x(2x^2-3x-2)$

$\cdot f''(x) = e^x(2x^2-3x-2) + (4x-3)(e^x)$

$= e^x(2x^2+x-5)$

$\frac{1}{4}\left(f(x) - 2f'(x) + f''(x)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^x(2x^2-7x+5) - e^x(4x^2-6x-4) + e^x(2x^2+x-5)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^x(\cancel{2x^2}-\cancel{7x}+\cancel{5}-\cancel{4x^2}+\cancel{6x}+4+\cancel{2x^2}+\cancel{x}-\cancel{5})\right)$

$= \frac{1}{\cancel{4}}(e^x)\times\cancel{4} = e^x$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{4}\left(f(x) - 2f'(x) + f''(x)\right) = e^x$

ب/ إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

لدينا من السؤال (أ) $f(x) - 2f'(x) + f''(x) = 4e^x$

تكافئ ؛ $f(x) = 2f'(x) - f''(x) + 4e^x$

إذن ؛ $F(x) = 2f(x) - f'(x) + 4e^x$

$= (4x^2-14x+10)e^x - e^x(2x^2-3x-2) + 4e^x$

$= e^x(4x^2-14x+10-2x^2+3x+2+4)$

$F(x) = e^x(2x^2-11x+16)$

2/ أ/ إشارة $f(x)$ هي إشارة $2x^2-7x+5$ لأن $e^x>0$ على $\mathbb{R}$

$2x^2-7x+5=0$ $x_1=1$ $x_2=\frac{5}{2}$

x	$-\infty$ 1 $\frac{5}{2}$ $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

ب/ حساب المساحة S $x=0$ $x=2$ $y=0$

$S = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 -f(x) = \left[e^x(2x^2-11x+16)\right]_0^1 + \left[e^x(-2x^2+11x-16)\right]_1^2$

$= (e^1\times 7 - 16) + (e^2(-2) + 7e^1)$

4 $= (14e^1 - 2e^2 - 16)\times 2cm \times 2cm = (56e^1 - 8e^2 - 64)cm^2$

التمرين الرابع :

$g(x) = x^2 - e^{-x} + 3x + 1$

1/ حساب $g'(x)$: $g'(x) = 2x + e^{-x} + 3$

دراسة اتجاه تغير الدالة g' : $g''(x) = 2 - e^{-x}$

$g''(x) = 0$ معناه : $2 - e^{-x} = 0$ ومنه $x = -\ln 2$ أي $x = \ln(\frac{1}{2})$

x	$-\infty$	$\ln(\frac{1}{2})$	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

g' متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \ln(\frac{1}{2})]$

g' متزايدة تماما على المجال $[\ln(\frac{1}{2}); +\infty[$

2/ $g'(\ln(\frac{1}{2})) \simeq 3{,}61$

x	$-\infty$	$\ln(\frac{1}{2})$	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↘	$3{,}61$	↗

بما أن $3{,}61$ قيمة حدية صغرى للدالة g' على $\mathbb{R}$

فإن $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g لدينا :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	

g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

3/ حساب $g(0)$: $g(0) = (0)^2 - e^0 + 3(0) + 1 = \boxed{0}$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II/ $f(x) = (x^2 + x)e^{x} - x$

1/

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 e^{x} + x e^{x} - x) = \boxed{+\infty}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left((x+1)e^{x} - 1\right)\right] = \boxed{+\infty}$

2/ أ/ بيان أن $(\Delta): y = -x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to -\infty} [(x^2 + x)e^{x} - x + x] = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 e^{x} + x e^{x}) = 0$

إذن $(\Delta): y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ أي إشارة $f(x) + x$

لدينا : $f(x) + x = (x^2 + x)e^{x}$

إشارة الفرق من إشارة $x^2 + x$ لأن $e^{x} > 0$ على $\mathbb{R}$

5

$x^2+x=0$ معناه: $x(x+1)=0$ إما $x=0$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D) في $(-1;+1)$	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في $(0;0)$	(C_f) فوق (D)	

3) أ- تبيان أن $f'(x)=e^{x}g(x)$

$$f'(x) = (2x+1)(e^{x}) + (e^{x})(x^2+x) - 1$$
$$= e^{x}\left(2x+1+x^2+x-\frac{1}{e^{x}}\right)$$
$$= e^{x}\left(x^2+3x+1-e^{-x}\right) = e^{x}\times g(x)$$

ب- استنتاج اتجاه التغير: إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لأن $e^{x}>0$ وبالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=0$

4) أ- المشتقة:
$$f'(x) = e^{x}\left(x^2+3x+1-e^{-x}\right)$$

$$f''(x) = e^{x}\left(x^2+3x+1-e^{-x}\right)+\left(2x+3+e^{-x}\right)(e^{x})$$
$$= e^{x}\left(x^2+3x+1-\cancel{e^{-x}}+2x+3+\cancel{e^{-x}}\right)$$
$$= e^{x}\left(x^2+5x+4\right)$$

ب- إشارة $f''(x)$ هي إشارة x^2+5x+4 لأن $e^{x}>0$ لكل x

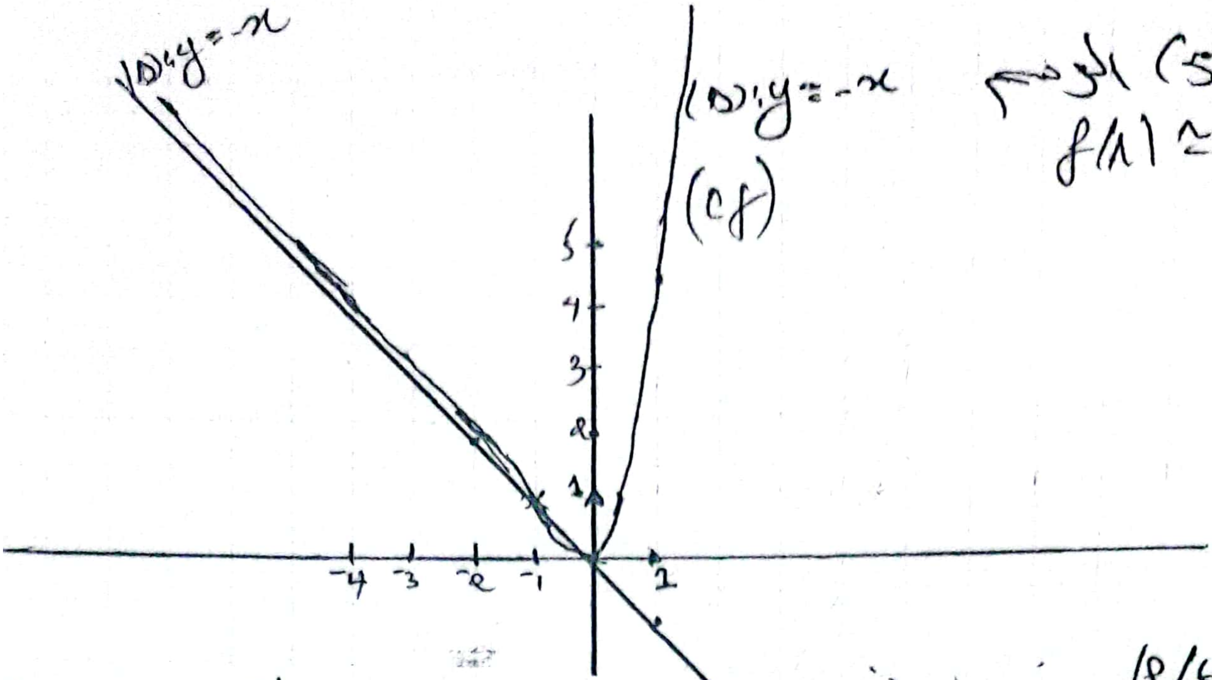
$x^2+5x+4=0$ معناه: $x_1=-1$ ، $x_2=-4$

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f'' انعدمت مغيرة إشارتها، (C_f) يقبل نقطتي انعطاف إحداثياتهما $(-1;f(-1))$ أي $(-1;1)$ و $(-4;f(-4))$ أي $(-4;12e^{-4}+4)$

5) الرسم

$f(1) \simeq 4,43$



أ/6

$[(x^2-2x+2)e^x]' = (2x-2)(e^x) + (e^x)(x^2-2x+2)$

$= e^x(\cancel{2x}-\cancel{2}+x^2-\cancel{2x}+\cancel{2}) = x^2e^x$

إذن الدالة $(x^2-2x+2)e^x$ هي دالة أصلية للدالة x^2e^x على $\mathbb{R}$

ب/ باستعمال التكامل بالتجزئة بيان أن: $\int_0^1 xe^x dx = 1$

$u(x) = x \qquad v'(x) = e^x$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^x$

$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x$

$= (1)(e^1) - (0)(e^0) - (e^1 - e^0)$

$= \cancel{e^1} - \cancel{e^1} + 1 = \boxed{1}$

ج/ حساب التكامل $\int_0^1 (x^2+x)e^x dx$

$\int_0^1 (x^2+x)e^x = \int_0^1 x^2e^x + \int_0^1 xe^x$

$= [(x^2-2x+2)e^x]_0^1 + 1$

$= (e^1) - (2e^0) + 1 = e^1 - 1$

التفسير الهندسي: لدينا $\int_0^1 (x^2+x)e^x dx = \int_0^1 (f(x)-y)dx$ مع $y=-x$

هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Cf) والمستقيم $(D): y=-x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ ، $x=1$

7)

بكالوريا تجريبية 2022

- الموضوع الثاني

الموضوع الثاني:

التمرين الأول

1) خطأ <= التبرير: $\log(x^2+11x-2)=\log x+\log 10$

معناه $\log(x^2+11x-2)=\log(10x)$ معناه $x^2+11x-2=10x$

أي: $x^2+x-2=0$ ، $x_1=1$ ، $x_2=-2$

إذن المعادلة لها حل وحيد $x_1=1$ ($x_2=-2$ مرفوض) لأن $x>0$

2) خطأ. التبرير: $3^{x-2}=4$ معناه $\ln(3^{x-2})=\ln 4$

أي: $(x-2)\ln 3=\ln 4$ ومنه $x-2=\frac{\ln 4}{\ln 3}$ أي $x=\frac{\ln 4}{\ln 3}+2$

$x\simeq 3{,}26$ و $3{,}26<4$

3) لدينا $f(x)=-x+3+\frac{1}{-2}\times\frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}+1}$ ، $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right)$

خطأ

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;5]$ تساوي: $\frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\,dx$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right)\right]_1^5$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-10}+1\right)\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2}+1\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-10}+1\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{e^{-2}+1}{e^{-10}+1}\right)=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{e^{8}+e^{10}}{1+e^{10}}\right)$$

4) صحيح <=

$$P_n=e^{4+7+\dots+3n+4}=e^{\frac{n+1}{2}[4+3n+4]}$$

$$\ln P_n=\frac{n+1}{2}(8+3n)$$

لدينا: $\ln P_n=781$ معناه $\frac{n+1}{2}(8+3n)=781$

ومنه $8n+3n^2+8+3n=1562$ ومنه: $3n^2+11n-1554=0$

$n_1=21$ ، $n_2=-\frac{74}{3}$ (مرفوض)

أي من أجل $n=21$ فإن $\ln P_n=781$

1) خطأ ، 2) خطأ ، 3) خطأ ، 4) صحيح

التمرين الثالث

1/ أ) إعادة الرسم - تمثيل الحدود الأربعة الأولى -

ب) $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ، (u_n) متناقصة تماما

(u_n) متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (C)

2/ أ/ البرهان بالتراجع $P(n)$: $u_n \geq 2$

من أجل $P(0)$ ، لدينا $u_0 = 4$ و $4 \geq 2$ إذن $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ أي $u_n \geq 2$ ونثبت صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq 2$

لدينا $u_n \geq 2$ منه $u_n^2 \geq 4$ منه $\frac{1}{2}u_n^2 \geq 2$

منه $\frac{1}{2}u_n^2 + 2 \geq 4$ منه $\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} \geq 2$ إذن $u_{n+1} \geq 2$

ومنه $P(n+1)$ محققة ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$

ب/

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} + u_n\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} + u_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}u_n^2 + 2 - u_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} + u_n} = \frac{2 - \frac{1}{2}u_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} + u_n}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(4-u_n^2)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2}+u_n} = \frac{1}{2}\,\frac{(2-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2}+u_n}$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n) من إشارة $2-u_n$ لأن $2+u_n > 0$ و $\frac{1}{2} > 0$

و $\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2} + u_n > 0$ $(u_n \geq 2)$

لدينا $u_n \geq 2$ منه $-u_n \leq -2$ منه $2 - u_n \leq 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذن (u_n) متناقصة .

طريقة 2 إشارة الفرق من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما

و $\frac{1}{2} > 0$ بوضع $u_n = x$ ندرس إشارة $(2-x)(2+x)$

علما أن $u_n \geq 2$ فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$

إذن (u_n) متناقصة .

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(2-x)(2+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

جـ/ (u_n) متقاربة لأنها

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2 ومتناقصة .

2

II/ $V_n = U_n^2 - 4$

1/ نبين أن (V_n) هندسية ، أي نبين أن $V_{n+1} = q V_n$ (مع q عدد حقيقي)

لدينا ، $V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 4$ ، $V_{n+1} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2}\right)^2 - 4$

$$= \frac{1}{2}U_n^2 + 2 - 4 = \frac{1}{2}U_n^2 - 2 = \frac{1}{2}(U_n^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

ومنه : (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

الحد الأول V_0 : $V_0 = U_0^2 - 4 = (4)^2 - 4 = \boxed{12}$

2) كتابة V_n بدلالة n : $V_n = V_0 \times q^n = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج U_n بدلالة n :

$$U_n^2 = V_n + 4$$

$$U_n = \sqrt{V_n + 4} = \sqrt{12\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{12\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4}\right) = 4$$

لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

3/ لدينا $U_n^2 = V_n + 4$ ، لنحسب S_n

$$S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2 = (V_0 + 4) + (V_1 + 4) + \dots + (V_n + 4)$$

$$= (V_0 + V_1 + \dots + V_n) + 4(n+1)$$

$$= V_0\left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right] + 4n + 4 = 12\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] + 4n + 4$$

$$\boxed{S_n = 24\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 4n + 4}$$

التمرين الثالث

8 كريات $\boxed{\begin{matrix} 3N \\ 5B \end{matrix}}$

السحب تزامني لـ 2 واحد

عدد الحالات الممكنة $C_8^2 = 28$

1) ط 1:

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_5^2}{C_8^2} = \frac{25}{28}$$

ط 2: (الحادثة العكسية)

$$P(A) = 1 - \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{28-3}{28} = \boxed{\frac{25}{28}}$$

$$P(B) = \frac{C_3^2 + C_5^2}{C_8^2} = \frac{3+10}{28} = \boxed{\frac{13}{28}}$$

2) أ) معناه سحب كريتين بيضاوين يتحصل اللاعب على $\alpha DA + \alpha DA$ علما أنه دفع $40DA$ وبالتالي: $X_1 = 2\alpha - 40$

• معناه سحب كريتين من لونين مختلفين يتحصل على αDA ويخسر $30D$ علما أنه دفع $40D$ وبالتالي $X_2 = \alpha - 30 - 40$ أي $X_2 = \alpha - 70$

معناه سحب كريتين سوداوين يخسر $60DA$ مع دفعه لـ $40DA$

إذن $X_3 = -100$

تعريف قانون الاحتمال:

$$P(X = 2\alpha - 40) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28}$$

$$P(X = \alpha - 70) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \boxed{\frac{15}{28}}$$

$$P(X = -100) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \boxed{\frac{3}{28}}$$

x_i	$2\alpha - 40$	$\alpha - 70$	-100
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

ج) $E(X) = \sum x_i p_i = (2\alpha - 40)\left(\frac{10}{28}\right) + (\alpha - 70)\left(\frac{15}{28}\right) + (-100)\left(\frac{3}{28}\right)$

$$= \frac{20\alpha - 400 + 15\alpha - 1050 - 300}{28}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{35\alpha - 1750}{28}}$$

• اللعبة في صالح اللاعب معناه $E(X) > 0$ أي $\frac{35\alpha - 1750}{28} > 0$

$28 > 0$ إذن $35\alpha - 1750 > 0$ أي $\alpha > 50$

أصغر قيمة لـ α هي 51 حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب

4

التمرين الرابع: $g(x) = x^2+3-2\ln x$

I / 1) إشارة $g'(x)$: $g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$ ، ومنه $g'(x) = \frac{2x^2-2}{x}$

من إشارة البسط لأن $x>0$ في $]0;+\infty[$

$2x^2-2=0$ ومنه $x^2=1$ ، $x=-1$ أو $x=1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

g متناقصة تماما على المجال $]0;1]$

g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

2) حدينا: $g(1)=4$ أي 4 قيمة حدية صغرى للدالة g على $]0;+\infty[$ وبالتالي $g(x)>0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$

3) استنتاج أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ $g(x+1)>0$

لدينا $x>0$ $g(x)>0$

$x+1>0$ $g(x+1)>0$ أي $x>-1$ يكون $g(x+1)>0$

II / $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

1 / أ) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right) = \boxed{-\infty}$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - \frac{1}{x+1} - 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \boxed{+\infty}$

2 / أ) بين أن: $f'(x) = \frac{g(x+1)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{-2}{x+1}\right)(x+1)-(1)(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2+2+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x+1)}{(x+1)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f: إشارة $f'(x)$ موجبة تماما لأن $g(x+1)>0$ و $(x+1)^2>0$ من أجل كل x من $]-1;+\infty[$

ومنه f متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$

جدول التغيرات

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

3) أ) بيان أن $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[\cancel{x}-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}-\cancel{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$ عند $+\infty$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$، لدينا: $f(x)-x = \frac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$

إشارة الفرق من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما على $]-1,+\infty[$

$-1+2\ln(x+1)=0$ معناه $\ln(x+1)=\frac{1}{2}$ ومنه $x=e^{\frac{1}{2}}-1$

x	-1		$e^{\frac{1}{2}}-1$		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(e^{\frac{1}{2}}-1 ; e^{\frac{1}{2}}-1)$ أي $(0,64 ; 0,64)$

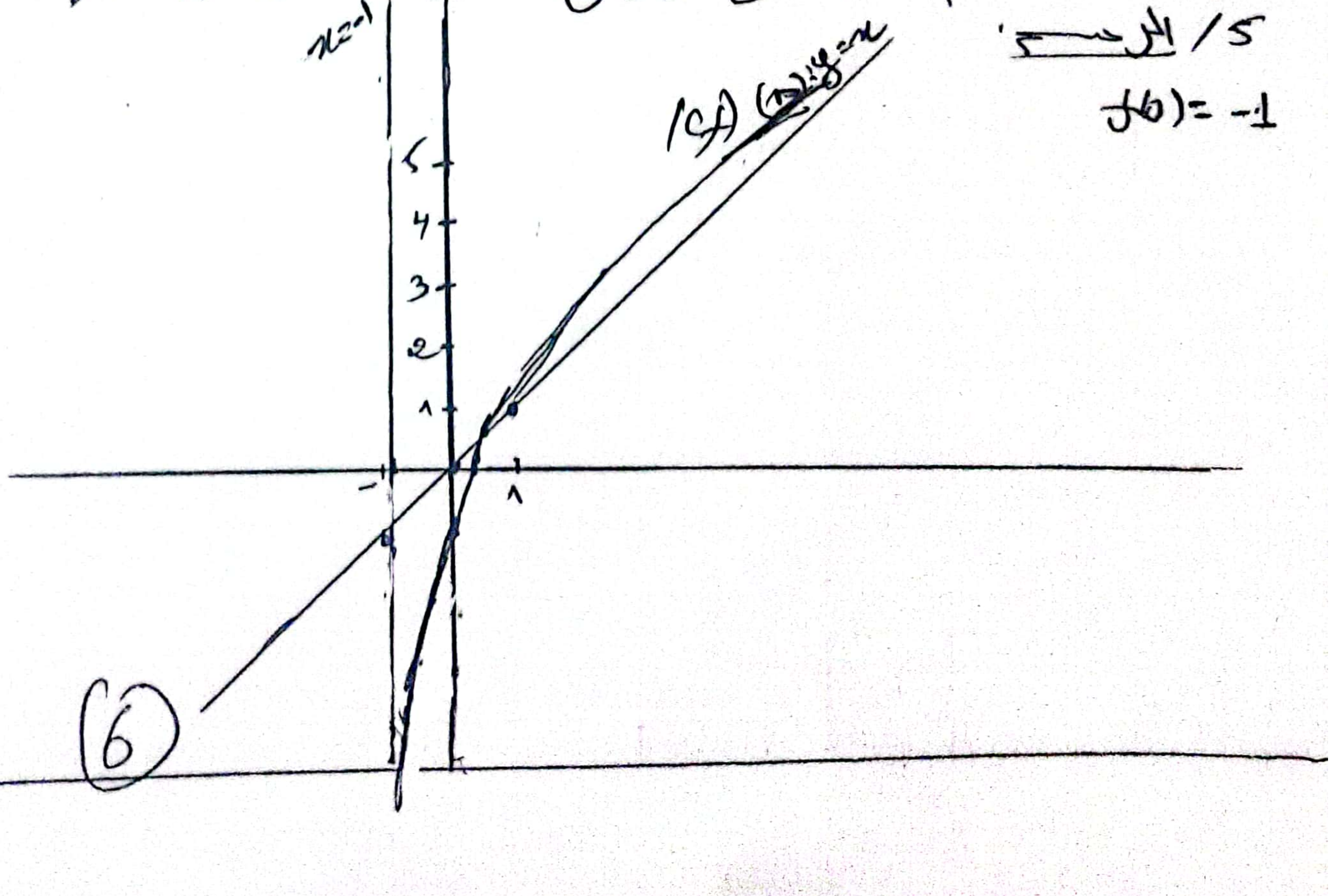
4/ لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1,+\infty[$

$f(0,3)\simeq -0,29$ و $f(0,4)\simeq 0,16$ ولدينا $f(0,3)\times f(0,4)<0$

وحسب م.ق.م (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α: $0,3<\alpha<0,4$

5/ الرسم

$f(0)=-1$



6

/ ٢.١٦ (ب) (ج) ق‌ا‌ج‌ب‌ة! المساحة: $\int_1^\lambda (f(x) - y)\,dx$

$$= \int_1^\lambda \left(x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} - x\right) dx$$

$$= \int_1^\lambda \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right) dx$$

$$= \Big[-\ln(x+1) + (\ln(x+1))^2\Big]_1^\lambda$$

$$= \left(-\ln(\lambda+1) + (\ln(\lambda+1))^2\right) - \left(-\ln(1+1) + (\ln(1+1))^2\right)$$

$$= -\ln(\lambda+1) + (\ln(\lambda+1))^2 + \ln 2 - (\ln(2))^2$$

$$A(\lambda) = \left(-\ln(\lambda+1) + (\ln(\lambda+1))^2 + \ln 2 - (\ln 2)^2\right) \times 2cm \times 2cm$$

$$A(\lambda) = \left(-\ln(\lambda+1) + (\ln(\lambda+1))^2 + \ln 2 - (\ln 2)^2\right) \times 4cm^2$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \Big[\underbrace{\ln(\lambda+1)}_{+\infty}\big(-1 + \underbrace{\ln(\lambda+1)}_{+\infty}\big) + \ln 2 - (\ln 2)^2\Big] \times 4$$

$$= \boxed{+\infty}$$